SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE - A. VENNI

INTERPOLAZIONE COMPLESSA
(prima parte)

1 DICEMBRE 1983

1. INTERPOLAZIONE TRA SPAZI DI BANACH

Assegnata una famiglia finita $\tilde{A} = (A_j)_{j \in J}$ di spazi di Banach diremo che essa è *ammissibile* se esiste uno s.v. topologico di Hausdorff A tale che $A_j \hookrightarrow A$ $\forall j \in J$. Sui sottospazi $\bigcap_{j \in J} A_j$ e $\sum_{j \in J} A_j$ di A (denotati usualmente con $\Delta(\tilde{A})$ e $\Sigma(\tilde{A})$) s'introducono le seguenti norme "naturali"

$$\|x\|_\Delta = \max_j \|x\|_{A_j} \quad , \quad \|x\|_\Sigma = \inf_{a_j \in A_j, \Sigma a_j = x} \sum_j \|a_j\|_{A_j}$$

con le quali $\Delta(\tilde{A})$ e $\Sigma(\tilde{A})$ sono spazi di Banach.

NOTA: L'inclusione continua di A_j in A va intesa in senso proprio, e non nel senso dell'esistenza di uno spazio di Banach B_j, isomorfo ad A_j e contenuto in A: altrimenti si potrebbe sempre prendere $A = \prod_{j \in J} A_j$. Tuttavia in questo caso si avrebbe poi $\Delta(\tilde{A}) = \{0\}$ e $\Sigma(\tilde{A}) = A$. Ha invece una certa rilevanza il fatto che gli spazi A_j abbiano intersezione non banale, anzi nelle applicazioni capita usualmente che $\Delta(\tilde{A})$ sia denso in A_j $\forall j \in J$.

Uno spazio di Banach X si dice *intermedio* (alla famiglia $(A_j)_{j \in J}$) se $\Delta(\tilde{A}) \hookrightarrow X \hookrightarrow \Sigma(\tilde{A})$.

Assegnate le famiglie ammissibili $\tilde{A} = (A_j)_{j \in J}$ $\tilde{B} = (B_j)_{j \in J}$, e gli spazi di Banach X, intermedio alla famiglia $\tilde{A}$, e Y, intermedio alla famiglia $\tilde{B}$, si dice che X e Y sono spazi d'interpolazione (rispetto ad $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$) se $\forall$ $T: \Sigma(\tilde{A}) \to \Sigma(\tilde{B})$ lineare e tale che $T|_{A_j} \in L(A_j, B_j)$, si ha che $T|_X \in L(X, Y)$.

Si può osservare che se $\tilde{A} = (A_0, A_1)$ con $A_0 \hookrightarrow A_1$, allora $\Delta(\tilde{A}) = A_0$, $\Sigma(\tilde{A}) = A_1$ (norme equivalenti) cosicché gli spazi intermedi ad $\tilde{A}$ sono davvero "intermedi" tra A_0 e A_1.

La situazione descritta astrattamente qui sopra è suggerita dal ben noto teorema di M. Riesz - G.O. Thorin

<u>Teorema</u>. Per $i = 0,1$ sia S_i uno spazio con misura e sia A_i uno spazio vettoriale contenente $L^p(S_i)$ $\forall p \in [1,\infty]$. Siano p_i, $q_i \in [1,\infty]$ e sia $T: A_0 \to A_1$ tale che $T|_{L^{p_0}(S_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_0}(S_0), L^{q_0}(S_1))$ (con norma M_0) e $T|_{L^{p_1}(S_0)} \in \mathcal{L}(L^{p_1}(S_0), L^{q_1}(S_1))$ (con norma M_1). Se $\theta \in [0,1]$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$, allora $T|_{L^p(S_0)} \in \mathcal{L}(L^p(S_0), L^q(S_1))$ (con norma $\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$).

(Per una dimostrazione, v. [SW] pp. 179 ss.).

Un'altra situazione in cui si presentano naturalmente spazi d'interpolazione è la seguente. Sia A un operatore autoaggiunto positivo in uno spazio di Hilbert H e per $0 \leq \alpha \leq 1$ sia A^α la potenza frazionaria di A, definita nel modo usuale. Allora $\mathcal{D}(A^\alpha)$ (con la norma del grafico) è intermedio tra $\mathcal{D}(A)$ (anch'esso con la norma del grafico) e H. Segue dalla disuguaglianza di Heinz (v. p. es. [T] p. 44) che se A_1 è un operatore autoaggiunto positivo nello spazio di Hilbert H_1, allora $\forall \alpha \in [0,1]$ $\mathcal{D}(A^\alpha)$ e $\mathcal{D}(A_1^\alpha)$ sono spazi d'interpolazione rispetto alle coppie $(\mathcal{D}(A), H)$, $(\mathcal{D}(A_1), H_1)$.

Sono noti diversi metodi di costruzione di spazi intermedi tra coppie ammissibili di spazi di Banach. La natura di questi metodi è tale che, usualmente, quando lo stesso metodo è applicato a due coppie ammissibili, gli spazi intermedi ottenuti sono d'interpolazione tra le cop

pie stesse. In questo caso, inoltre, succede che se X e Y sono spazi d'interpolazione rispetto alle coppie ammissibili $\tilde{A} = (A_o, A_1)$, $\tilde{B} = (B_o, B_1)$, allora $\|T\|_{L(X,Y)} \leq C(\tilde{A}, \tilde{B}) \max_{j=0,1} \|T\|_{L(A_j,B_j)}$ ($C(\tilde{A},\tilde{B})$ indipendente da T) (v. [BL] Th. 2.4.2.). Più in generale, se $\phi: \bar{R}^+ \times \bar{R}^+ \to \bar{R}^+$ è una funzione non-decrescente in ciascuna variabile e tale che $\phi(1,1) = 1$, il metodo d'interpolazione si dice di tipo ϕ se $\|T\|_{L(X,Y)} \leq C(\tilde{A},\tilde{B})\ \phi\ (\|T\|_{L(A_o,B_o)}, \|T\|_{L(A_1,B_1)})$, e se è possibile porre $C(\tilde{A},\tilde{B}) = 1$ quali che siano $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$ il metodo si dice esatto di tipo ϕ. Nei due esempi citati il metodo è esatto di tipo ϕ con $\phi(t_1,t_2) = t_1^{1-\theta}\ t_2^{\theta}$ nel primo caso e $\phi(t_1,t_2) = t_1^{1-\alpha}\ t_2^{\alpha}$ nel secondo caso.

E' noto il seguente teorema (Aronszajn-Gagliardo).

Teorema. Sia $\tilde{A}$ una coppia ammissibile e A uno spazio intermedio per $\tilde{A}$ che sia d'interpolazione con se stesso. Allora è possibile, per ogni coppia ammissibile $\tilde{B}$, costruire uno spazio intermedio $F(\tilde{B})$, tale che:

i) se $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ sono coppie ammissibili, allora $F(\tilde{B})$ e $F(\tilde{C})$ sono spazi d'interpolazione per tali coppie

ii) $F(\tilde{A}) = A$

iii) se $\tilde{B}$ è una coppia ammissibile, B è uno spazio intermedio a $\tilde{B}$ e A, B sono spazi d'interpolazione rispetto ad $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, allora $F(\tilde{B}) \hookrightarrow B$

(v. [BL], Th. 2.5.1., Cor. 2.5.2. La dimostrazione è costruttiva).

Oggetto di questo seminario è il cosiddetto metodo complesso d'interpolazione tra due spazi di Banach (complessi). Altri metodi (i cosiddetti metodi reali, tutti tra loro equivalenti) danno luogo a spazi diversi da quelli ottenuti con il metodo complesso. Per i metodi reali si veda, p. es., [LP], [G] .

Per l'esposizione del metodo complesso seguiamo il lavoro fondamentale [C], con minori modifiche dovute a miglioramenti ottenuti in seguito (v. p. es. [KPS]).

2. GLI SPAZI D'INTERPOLAZIONE $[A_0, A_1]_\theta$

Sia $\tilde{A} = (A_0, A_1)$ una coppia ammissibile di spazi di Banach complessi. $F(A_0, A_1)$ è lo spazio delle funzioni $f: \bar{S} \to A_0 + A_1$, dove $S = \{z \in \mathbf{C}\ ;\ \mathrm{Re}\, z \in]0, 1[\}$ che soddisfano le seguenti condizioni:

(2.1) f è continua e limitata su $\bar{S}$, e olomorfa su S (nella norma di $A_0 + A_1$)

(2.2) per $j = 0,1$ $f(j + it) \in A_j$ $\forall t \in \mathbf{R}$ e $t \to f(j + it)$ è continua e limitata (nella norma di A_j)

S'introduce una norma di Banach su $F(A_0, A_1)$ ponendo

$$\|f\|_F = \max_{j=0,1} \sup_{t \in \mathbf{R}} \|f(j + it)\|_{A_j}$$

Poiché per le funzioni olomorfe limitate sulla striscia S, continue su $\bar{S}$, vale il principio del massimo, risulta che $\|f\|_F = 0 \Longrightarrow f = 0$ e che $F(A_0, A_1)$ è completo. Per tali funzioni, inoltre (e in realtà per funzioni f tali che per $|\mathrm{Im} z| \to \infty$ $\|f(z)\| = O(e^{(1-\varepsilon)\pi\, |\mathrm{Im} z|})$ con $\varepsilon > 0$) vale la formula di rappresentazione (v. [C] p. 116)

$$f(s + it) = \sum_{j=0,1} \int_{\mathbf{R}} P_j(a, s-\sigma) f(j + i\sigma)\, d\sigma$$

dove P_0, P_1 sono i nuclei di Poisson per S:

$$P_j(a, s) = \frac{1}{2} \frac{\sin(\pi a)}{\cosh(\pi s) - (-1)^j \cos(\pi a)}$$

Per $\theta \in [0, 1]$ si definisce $[A_0, A_1]_\theta$ come lo spazio descritto da $f(\theta)$ per $f \in F(A_0, A_1)$. Poiché l'operatore $f \to f(\theta)$ (da $F(A_0, A_1)$ in $A_0 + A_1$) è

continuo (come conseguenza del principio del massimo) si può introdurre una norma di Banach su $[A_0, A_1]_\theta$ ponendo

$$\|x\|_\theta = \inf\{\|f\|_F;\ f \in F(A_0, A_1),\ \ f(\theta) = x\}$$

La dimostrazione del fatto che $[A_0, A_1]_\theta$ è intermedio per (A_0, A_1) e che questa costruzione dà luogo a spazi d'interpolazione è estremamente elementare. Ad esempio la proprietà d'interpolazione segue dal fatto che se $T \in L(A_j, B_j)$ $(j = 0,1)$ allora manifestamente $f \in F(A_0, A_1) \Rightarrow Tf \in F(B_0, B_1)$.
Da proprietà delle funzioni olormofe segue poi che se
$T \in L(A_j, B_j)$ $(j = 0,1)$, allora $\|T\|_{L([A_0,A_1]_\theta,\ [B_0,B_1]_\theta)} \leq$
$\leq \|T\|^{1-\theta}_{L(A_0,B_0)} \|T\|^{\theta}_{L(A_1,B_1)}$ e quindi il metodo è esatto di tipo ϕ, con
$\phi(s_1, s_2) = s_1^{1-\theta} s_2^{\theta}$

3. PROPRIETA' DEGLI SPAZI D'INTERPOLAZIONE

Si sarebbero potuti definire spazi $[A_0, A_1]_z$ $\forall z \in \bar{S}$. Tuttavia è facile verificare che $[A_0, A_1]_{\theta+i\rho} = [A_0, A_1]_\theta$ (con norme uguali), dato che è ovvio che $F(A_0, A_1)$ è invariante rispetto a traslazioni puramente immaginarie.

Più in generale, ci si può chiedere se è possibile ottenere $[A_0, A_1]_\theta$ partendo da spazi funzionali su $\bar{S}$ diversi da $F(A_0, A_1)$. Per esempio, se consideriamo lo spazio $F_0(A_0, A_1) = \{f \in F(A_0, A_1);$
$\lim_{|t|\to\infty} \|f(j + it)\|_{A_j} = 0$ $(j = 0,1)\}$ succede che $[A_0, A_1]_\theta = \{f(\theta);$
$f \in F_0(A_0, A_1)\}$ e $\forall x \in [A_0, A_1]_\theta$ $\|x\|_\theta = \inf\{\|f\|_F;\ f \in F_0(A_0, A_1),\ f(\theta) =$
$= x\}$.

Questo segue dal fatto che se $f \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ allora la funzione $z \to e^{\delta(z-\theta)^2} f(z)$ appartiene a $\mathcal{F}_0(A_0, A_1)$ $\forall \delta \in \mathbf{R}^+$ e la sua norma in $\mathcal{F}(A_0, A_1)$ tende a $\|f\|_{\mathcal{F}}$ per $\delta \to 0^+$. Alla luce di questo risultato acquista interesse il seguente teorema di densità:

Teorema. Il sottospazio di $\mathcal{F}_0(A_0, A_1)$ generato dalle funzioni del tipo $z \to \phi(z)a$ con $a \in A_0 \cap A_1$ e ϕ: $\bar{S} \to \mathbf{C}$, continua, olomorfa su S, tale che $\lim_{|\mathrm{Im} z| \to \infty} \phi(z) = 0$, è denso in $\mathcal{F}_0(A_0, A_1)$

Cenno di dimostrazione. Se $f \in \mathcal{F}_0(A_0, A_1)$, e $g_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon z^2} f(z)$, allora $g_\varepsilon \in \mathcal{F}_0(A_0, A_1)$ e $\|g_\varepsilon - f\|_{\mathcal{F}} \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} 0$. Perciò basta approssimare g_ε. Chiamata per comodità h tale funzione sia $h_n(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} h(z + 2\pi i j n)$ ($\sum_{j=-\infty}^{+\infty}$ in $A_0 + A_1$). Allora h_n è periodica di periodo $2\pi i n$; inoltre si prova che $\inf_{n \in \mathbf{N},\, \delta \in \mathbf{R}^+} \|e^{\delta z^2} h_n - h\|_{\mathcal{F}} = 0$ e quindi basta approssimare h_n con polinomi trigonometrici a coefficienti in $A_0 \cap A_1$. Questo è possibile perché i coefficienti di Fourier di $t \to h_n(s + it)$ non dipendono da $s \in [0,1]$ e appartengono quindi a $A_0 \cap A_1$ (v. [KPS] p. 217 ss.).

Si ottiene subito il

Corollario. $\forall \theta \in [0,1]$ $A_0 \cap A_1$ è denso in $[A_0, A_1]_\theta$ e da qui segue che per $j = 0,1$ $[A_0, A_1]_j$ è la chiusura di $A_0 \cap A_1$ in A_j, con la stessa norma.

Un'altra conseguenza è che se $A_j^0 = \overline{A_0 \cap A_1}^{A_j}$, allora $\mathcal{F}(A_0, A_1) = \mathcal{F}(A_0^0, A_1^0)$ e quindi $[A_0, A_1]_\theta = [A_0^0, A_1^0]_\theta \forall \theta \in [0,1]$. Da qui appare il ruolo fondamentale giocato da $A_0 \cap A_1$: in particolare non è restrittivo supporre che $A_0 \cap A_1$ sia denso in A_0 e in A_1.

Si osservi che il teorema di densità implica l'esistenza di un sottospazio denso sia in $\mathcal{F}_0(A_0, A_1)$ che in $\mathcal{F}_0(A_0^0, A_1^0)$ sul quale coincidono le norme indotte, e quindi implica identità tra $\mathcal{F}_0(A_0, A_1)$ e $\mathcal{F}_0(A_0^0, A_1^0)$. Per ottenere che $\mathcal{F}(A_0, A_1) = \mathcal{F}(A_0^0, A_1^0)$ si può sfruttare il

fatto che $A_0^o + A_1^o$ è un sottospazio chiuso di $A_0 + A_1$ e ha la norma indotta da $A_0 + A_1$. Ciò non segue solo dal fatto che A_j^o è un sottospazio chiuso di A_j, ma anche dal fatto che $A_0^o \cap A_1^o = A_0 \cap A_1$ (per i dettagli e per un esempio in cui B_j è un sottospazio chiuso di A_j ma $B_0 + B_1$ ha una norma non equivalente a quello di $A_0 + A_1$, si veda [DGV 1]).

Il sottospazio denso in $F_0(A_0, A_1)$ introdotto col teorema di densità è anch'esso sufficiente per definire, quando $\theta \in]0,1[$, la norma $\|\cdot\|_\theta$ su $A_0 \cap A_1$: ciò significa che se $x \in A_0 \cap A_1$ allora $\|x\|_\theta$ è l'estremo inferiore di $\|f\|_F$ quando f descrive il succitato sottospazio denso con la condizione $f(\theta) = x$. Questa osservazione torna utile quando si presenta la necessità di lavorare con funzioni "buone".

Rivestono importanza fondamentale le seguenti disuguaglianze:

$$\log \| f(\theta)\|_\theta \leq \sum_{j=0,1} \int_R P_j(\theta,t) \log\|f(j + it)\|_{A_j} dt \tag{3.1}$$

$$\|f(\theta)\|_\theta \leq \sum_{j=0,1} \int_R P_j(\theta,t) \|f(j+it)\|_{A_j} dt \tag{3.2}$$

entrambe vere $\forall f \in F(A_0, A_1)$.

Prima di dare un cenno di dimostrazione di queste due disuguaglianze, notiamo che in (3.2) l'estremo inferiore delle norme L^∞ dei valori al bordo di una certa classe di funzioni è maggiorato con un'opportunamente pesata norma L^1 dei valori al bordo delle medesime funzioni. Poiché i pesi sono sommabili (con $\sum_{j=0,1} \int_R P_j(a,s)ds = 1 \ \forall a \in]0,1[$) la disuguaglianza inversa vale $\forall f \in F(A_0,A_1)$. Ora si sarebbe potuto considerare, anziché $F(A_0, A_1)$, uno spazio funzionale più ampio, formato da funzioni olomorfe su S e che (in qualche senso) avessero valori al bordo sommabili rispetto a un peso equivalente a P_j $(j = 0,1)$: si sarebbe, per esempio, potuto richiedere che f fosse olomorfa su S e che $f(a + it) =$

$= \sum_{j=0,1} \int_{\mathbf{R}} P_j(a,s-\sigma) f_j(\sigma) d\sigma$, con $\int_{\mathbf{R}} (\cosh \sigma)^{-1} \|f_j(\sigma)\|_{A_j} d\sigma < +\infty$. Da quanto sopra osservato segue però che lo spazio intermedio ottenuto mediante questo più ampio spazio funzionale è identico (anche rispetto alla norma) ad $[A_0, A_1]_\theta$.

La disuguaglianza (3.2) segue da (3.1) e dalla disuguaglianza di Jensen applicata alla funzione esponenziale. Per ottenere (3.1) si osserva che se $t \to \phi_j(t) = \log \|f(j + it)\|_{A_j}$ è C^∞ (altrimenti si procede per approssimazione) esiste una funzione $\Phi: \bar{S} \to \mathbf{C}$, continua su $\bar{S}$, olomorfa su S e tale che Re Φ è limitata e $\mathrm{Re}\, \phi(a + it) = \sum_{j=0,1} \int_{\mathbf{R}} P_j(a, t-s) \phi_j(s) ds$. Allora $e^{-\Phi} f \in F(A_0, A_1)$ e si verifica che $\|e^{-\Phi} f\|_F \leq 1$. Perciò $\|f(\theta)\|_\theta = e^{\mathrm{Re}\Phi(\theta)} \|e^{-\Phi(\theta)} f(\theta)\|_\theta \leq e^{\mathrm{Re}\Phi(\theta)}$, e quindi $\log \|f(\theta)\|_\theta \leq \sum_{j=0,1} \int_{\mathbf{R}} P_j(a,s) \phi_j(s) ds$.

4. DUALITA' E REITERAZIONE

Definizione. Siano A_0, A_1 spazi di Banach tali che $A_0 \hookrightarrow A_1$. $\forall r \in \mathbf{R}^+$ sia $S_0(r) = \{x \in A_0;\ \|x\|_{A_0} \leq r\}$ e $\overline{S_0(r)}$ la chiusura di $S_0(r)$ in A_1. Chiamiamo $\hat{A}_0^{A_1}$ (completamento secondo Gagliardo di A_0 rispetto ad A_1) l'insieme $\bigcup_{r>0} \overline{S_0(r)}$, che è ovviamente un sottospazio di A_1 contenente A_0. $\forall x \in \hat{A}_0^{A_1}$ poniamo $\|x\|_\wedge = \inf\{r \in \mathbf{R}^+;\ x \in \overline{S_0(r)}\}$. Si prova (v. [KPS] Ch. I, § 1) che $\|\cdot\|_\wedge$ è una norma di Banach su $\hat{A}_0^{A_1}$, che $A_0 \overset{1}{\hookrightarrow} \hat{A}_0^{A_1} \hookrightarrow A_1$, che se $A_0 \neq A_1$, allora $\hat{A}_0^{A_1} \neq A_1$ e che il completamento di Gagliardo di $\hat{A}_0^{A_1}$ rispetto ad A_1 è $\hat{A}_0^{A_1}$. E' inoltre facile verificare che $\hat{A}_0^{A_1}$ è uno spazio d'interpolazione e che se A_0 è riflessivo $\hat{A}_0^{A_1} = A_0$.

Supponiamo che $\tilde{A} = (A_0, A_1)$ sia una coppia ammissibile di spazi di Banach complessi tale che $\Delta(\tilde{A}) = A_0 \cap A_1$ sia denso in A_0 e in A_1 (e quindi anche in $\Sigma(\tilde{A}) = A_0 + A_1$). Allora è possibile identificare i dua

li A_0^*, A_1^*, $\Sigma(\tilde{A})^*$ con sottospazi di $\Delta(\tilde{A})^*$ che, per maggior chiarezza, distinguiamo indicandoli con A_0', A_1', $\Sigma(\tilde{A})'$ (l'identificazione si ottiene per restrizione a $\Delta(\tilde{A})$, e le norme sono quelle indotte dall'identificazione). Allora (A_0', A_1') è una coppia ammissibile, e ci si può quindi domandare quale relazione ci sia tra $([A_0, A_1]_\theta)'$ (Si ricordi che $\Delta(\tilde{A})$ è in ogni caso denso in $[A_0, A_1]_\theta$) e $[A_0', A_1']_\theta$.

Teorema (di dualità). Per $\theta \in]0, 1[$ $([A_0, A_1]_\theta)'$ è il completamento secondo Gagliardo di $[A_0', A_1']_\theta$ rispetto $\Delta(\tilde{A})^*$.

Cenno di dimostrazione (v. [KPS] p. 227 ss.).

(a) Immersione di $([A_0, A_1]_\theta)'$ nel completamento secondo Gagliardo di $[A_0', A_1']_\theta$.

Il funzionale $\Phi \in ([A_0, A_1]_\theta)'$ definisce in modo naturale un funzionale $\Phi_1 \in F(A_0, A_1)^*$. Poiché $f \to \gamma(f) = (f(it)P_0(\theta, t), f(1+it)P_1(\theta,t))$ è lineare e inettiva da $F(A_0, A_1)$ in $L^1(A_0) \times L^1(A_1)$, sfruttando (3.2) e il teorema di Hahn-Banach, su $L^1(A_0) \times L^1(A_1)$ si definisce un funzionale lineare continuo che prolunga $\Phi_1 \circ \gamma^{-1}$. Allora (v. [E], p. 588) si può scrivere $\Phi_1(f) = \sum_{j=0,1} \int_R < P_j(\theta,t) f(j+it), \psi_j(t) > dt$ per opportune $\psi_j : R \to A_j'$ limitate e w*-misurabili. Posto

$$\psi(x,z) = \sum_j \int_R < x, \psi_j(t) > P_j(\theta,t)dt \qquad (x \in \Delta(\tilde{A}))$$

si prova che $\psi(\cdot, z) \in \Delta(\tilde{A})^*$ e che $z \to \psi(\cdot, z)$ è analitica e limitata sulla striscia S. Se χ ne è una primitiva, i rapporti incrementali di χ costituiscono una successione limitata in $F(A_0', A_1')$ i cui valori in θ convergono a Φ nella norma di $A_0' + A_1' = \Delta(\tilde{A})^*$

(b) Poiché dalla densità di $\Delta(\tilde{A})$ in $[A_0, A_1]_\theta$ segue che $([A_0, A_1]_\theta)'$ è completo secondo Gagliardo in $\Delta(\tilde{A})^*$ ([KPS] p. 8), basta provare che $[A_0', A_1']_\theta \hookrightarrow ([A_0, A_1]_\theta)'$. Sia $f \in F(A_0', A_1')$. Se g appartiene al sottospazio di $F_0(A_0, A_1)$ introdotto nel teorema di densità, allora

$< g(z), f(z) >$ (dualità tra $\Delta(\tilde{A})$ e $\Delta(\tilde{A})^* = A'_0 + A'_1$) è analitica su S, continua e limitata su $\bar{S}$. Pertanto $|<g(\theta), f(\theta)>| \leq \|g\|_F \; \|f\|_F$, e poiché le funzioni g bastano a raggiungere $\|g(\theta)\|_\theta$, $f(\theta) \in ([A_0, A_1]_\theta)'$.

Nel lavoro di Calderón [C] la teoria della dualità è sviluppata in modo formalmente diverso. Calderón definisce spazi d'interpolazione $[A_0, A_1]^\theta$ $(0 < \theta < 1)$ utilizzando lo spazio $G(A_0, A_1)$ delle funzioni $g: \bar{S} \to A_0 + A_1$ tali che:

(a) g è continua da $\bar{S}$ ad $A_0 + A_1$ e $\|g(z)\|_{A_0+A_1} \leq C|z|$

(b) g è olomorfa su S

(c) $g(j + it_1) - g(j + it_2) \in A_j$ e $\|g(j + it_1) - g(j + it_2)\|_{A_j} \leq$
$\leq C|t_1 - t_2|$

e pone $[A_0, A_1]^\theta = \{g'(\theta); g \in G(A_0, A_1)\}$.

Calderón prova poi che se $\Delta(\tilde{A})$ è denso in A_0 e A_1, allora $([A_0, A_1]_\theta)'$ è isometricamente isomorfo a $[A'_0, A'_1]^\theta$. In generale (v. [B]) $[A_0, A_1]_\theta$ è un sottospazio chiuso di $[A_0, A_1]^\theta$ con la stessa norma; se uno almeno degli A_j è riflessivo, allora $[A_0, A_1]_\theta = [A_0, A_1]^\theta$ e tale spazio è riflessivo.

Enunciamo infine il teorema di reiterazione.

<u>Teorema</u>. Se (A_0, A_1) è una coppia ammissibile, $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq 1$, $\sigma \in [0,1]$ e $s = (1-\sigma)\theta_0 + \sigma\theta_1$, allora

$$[[A_0, A_1]_{\theta_0}, [A_0, A_1]_{\theta_1}]_\sigma = [A_0, A_1]_s.$$

Nell'enunciato originario di Calderón era richiesto ulteriormente che $\Delta(\tilde{A})$ fosse denso in $[A_0, A_1]_{\theta_0} \cap [A_0, A_1]_{\theta_1}$. Quest'ipotesi non segue dalla densità di $A_0 \cap A_1$ in $[A_0, A_1]_{\theta_0}$ e in $[A_0, A_1]_{\theta_1}$. Comunque recentemente Cwikel [CW] ha eliminato l'ipotesi.

L'immersione di $[A_0, A_1]_s$ in $[[A_0, A_1]_{\theta_0}, [A_0, A_1]_{\theta_1}]_\sigma$ non presenta difficoltà. L'immersione inversa si ottiene passando attra

verso i duali.

5. CONNESSIONE CON IL METODO REALE

Denotiamo con $(A_o, A_1)_{\theta,p}$ lo spazio d'interpolazione definito con uno qualunque degli equivalenti metodi reali. Allora, per $\theta \in]0,1[$

$$(A_o, A_1)_{\theta,1} \hookrightarrow [A_o, A_1]_\theta \hookrightarrow (A_o, A_1)_{\theta,\infty} \quad ([BL], \text{Th. } 4.7.1.)$$

e dal teorema di reiterazione reale segue allora che se
$0 < \theta_o < \theta_1 < 1$, $0 < \lambda < 1$, $\theta = (1 - \lambda)\theta_o + \lambda\theta_1$
$([A_o, A_1]_{\theta_o} \; [A_o, A_1]_{\theta_1})_{\lambda,p} = (A_o, A_1)_{\theta,p}$ ([T], th. 1.10.2).

Sia $1 \leq p \leq 2$. Uno spazio di Banach A si dice di tipo p se la trasformazione di Fourier è continua da $L^p(A)$ in $L^q(A)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$. E' ovvio che ogni spazio di Banach è di tipo 1, ed è noto che ogni spazio di Hilbert è di tipo 2. Si ha dunque (v. [P])

Teorema. Se (A_o, A_1) è una coppia ammissibile e A_j è di tipo p_j e se $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_o} + \frac{\theta}{p_1}$ con $0 < \theta < 1$, allora $(A_o, A_1)_{\theta,p} \hookrightarrow [A_o, A_1]_\theta \hookrightarrow (A_o, A_1)_{\theta,q}$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Questo risultato generalizza quello sopra citato e prova che se A_o e A_1 sono spazi di Hilbert, allora $[A_o, A_1]_\theta = (A_o, A_1)_{\theta,2}$.

BIBLIOGRAFIA

[SW] E.M. STEIN, G. WEISS: Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces. Princeton Univ. Press. Princeton N. J. 1971

[T] H. TRIEBEL: Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. North Holland Publ. Co. - Amsterdam 1978

[BL] J. BERGH, J. LÖFSTRÖM: Interpolation Spaces. An Introduction. Springer Verlag, Berlin, 1976

[LP] J.-L. LIONS, J. PEETRE: Sur une classe d'espaces d'interpolation. Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 19 (1964), 5-68.

[G] P. GRISVARD: Spazi di tracce e applicazioni. Rend. Mat. (6) 5 (1972) 657-729.

[C] A.P. CALDERON: Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method. Studia Math. 24 (1964), 113-190.

[KPS] S.G. KREIN, Ju. I. PETUNIN, E.M. SEMENOV: Interpolation of Linear Operators - A.M.S. - Providence R.I. 1982.

[DGV1] G. DORE, D. GUIDETTI, A. VENNI: Some Properties of the Sum and the Intersection of Normed Spaces; in corso di stampa su Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena.

[E] R.E. EDWARDS: Functional Analysis: Theory and Applications. Holt, Rinehart & Winston - New York 1965.

[B] J. BERGH: On the Relation Between Two Complex Methods of Interpolation - Indiana Univ. Math. J. 28 (1979) 775-778.

[CW] M. CWIKEL: Complex Interpolation Spaces, a Discrete Definition and Reiteration - Indiana Univ. Math. J. 27 (1978) 1005-1009.

[P] J. PEETRE: Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 42 (1969), 15-26.

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. DORE - A. VENNI

INTERPOLAZIONE COMPLESSA
(secondá parte)

15 DICEMBRE 1983

In questa seconda parte ci occupiamo dell'estensione del metodo complesso d'interpolazione al caso di più di due spazi, e in particolare riferiamo su risultati recentemente ottenuti da D. Guidetti e noi nell'ambito di uno dei possibili modi di effettuare tale estensione (v. [DGV 2]).

1. FAMIGLIE AMMISSIBILI

Quando si ha a che fare con famiglie ammissibili formate da un numero arbitrario (finito) di spazi di Banach si presentano alcune difficoltà che non si riscontrano nel caso delle coppie. Per esempio, se (A_0, A_1) è una coppia ammissibile e B_j è un sottospazio chiuso di A_j (con la norma di A_j), la condizione $B_0 \cap B_1 = A_0 \cap A_1$ è sufficiente affinché $B_0 + B_1$ abbia la norma di $A_0 + A_1$ (senza tale condizione, può succedere che la topologia di $B_0 + B_1$ sia strettamente più fine di quella di $A_0 + A_1$; v. [DGV1] § 2). Invece, nel caso di una famiglia arbitraria la condizione $\bigcap_{j \in J} B_j = \bigcap_{j \in J} A_j$ non sembra essere sufficiente per assicurare l'uguaglianza delle topologie di $\Sigma_j(B_j)$ e $\Sigma_j(A_j)$.

Un altro, più significativo, esempio è il seguente.

Sia $\tilde{A} = (A_j)_{j \in J}$ una famiglia ammissibile di spazi di Banach, tale che $\Delta(\tilde{A})$ sia denso in A_j $\forall j \in J$, e quindi anche in $\Sigma(\tilde{A})$. Allora A_j^* e $\Sigma(\tilde{A})^*$ si possono identificare a sottospazi A_j', $\Sigma(A)'$ di $\Delta(\tilde{A})^*$ e la famiglia $(A_j')_{j \in J}$ è ammissibile, con $\Sigma_j(A_j') = \Delta(\tilde{A})^*$ (con norme uguali, v. [DGV1] § 4). Succede inoltre che $\Sigma(\tilde{A})' \subseteq \Delta_j(A_j')$, e la norma di $\Sigma(\tilde{A})'$ coincide con quella di $\Delta_j(A_j')$; ma l'inclusione può essere propria. Ciò significa che può esistere un funzionale lineare $\phi: \Delta(\tilde{A}) \to \mathbf{C}$, che $\forall j \in J$ am

mette un prolungamento $\phi_j \in A^*_j$, senza che questi ϕ_j abbiano un comune prolungamento lineare a $\Sigma(\tilde{A})$ (che, se esistesse, sarebbe necessariamente continuo). Si è provato che $\Sigma(\tilde{A})' = \Delta_j(A'_j)$ se e solo se, posto $S: \prod_{j\in J} A_j \to A$ (A s.v. topologico contenente A_j), $S((x_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} x_j$ e $Y = \Delta(\tilde{A})^J \cap \ker S$, si ha $\bar{Y} = \ker S$ (in generale è evidentemente, $\bar{Y} \subseteq \ker S$). L'uguaglianza $\bar{Y} = \ker S$ significa che ogni famiglia di vettori a somma nulla può essere approssimata (in $\prod_{j\in J} A_j$) con famiglie a somma nulla, le cui componenti stiano in $\Delta(\tilde{A})$. Nel caso di una coppia di spazi si ha che $\ker S \subseteq \Delta(\tilde{A}) \times \Delta(\tilde{A})$ e quindi $Y = \ker S$. Abbiamo così un esempio di metodo d'interpolazione (il metodo Σ) tale che il duale dello spazio ottenuto con tale metodo può non essere intermedio tra gli spazi duali, se la famiglia $\tilde{A}$ ha più di due elementi.

2. VARIE ESTENSIONI DEL METODO COMPLESSO

Tutte le estensioni hanno in comune il fatto di definire gli spazi intermedi valutando in un punto di un certo dominio una classe di funzioni olomorfe in quel dominio. Possiamo perciò classificare queste estensioni facendo riferimento al numero di spazi che intervengono e al numero di variabili dalle quali dipendono le funzioni olomorfe usate. I casi studiati sono i seguenti:

I ∞ spazi - funzioni di 1 variabile ([CCRSW1,2] , [CF] , [KN 1,2])

II $N + 1$ spazi - funzioni di N variabili ([Fa] , v. anche [L])

III 2^N spazi - funzioni di N variabili ([Fe],[BF] ,[DGV 2])

Nei lavori dedicati al I caso il dominio di definizione delle funzioni olomorfe è un aperto regolare Ω di $\mathbf{C}$ (un cerchio in [KN1,2], un aperto semplicemente connesso in [CCRSW 1,2]). Ad ogni punto $\gamma \in \partial\Omega$

si fa corrispondere uno spazio di Banch A_γ e si considera uno spazio F di funzioni olomorfe su Ω, a valori in uno spazio di Banach $A \supseteq \bigcup_{\gamma \in \partial\Omega} A_\gamma$ che abbiano quasi ovunque limite non-tangenziale $f(\gamma) \in A_\gamma$ e tali che $\|f(\gamma)\|_{A_\gamma}$ sia limitata (e, per [CCRSW 1,2], misurabile). Su F si definisce la norma $\|f\|_F = \sup_\gamma \|f(\gamma)\|_{A_\gamma}$ (o ess sup) e lo spazio A_z ($z \in \Omega$) si definisce come $\{f(z);\ f \in F\}$ con norma $\|x\|_z = \inf\{\|f\|_F\ ;\ f(z) = x\}$. Vengono esaminate diverse questioni, la cui formulazione è comprensibilmente complicata, riguardanti dualità e reiterazione. In particolare, in ogni caso, se $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, con Γ_0 e Γ_1 opportunamente regolari e disgiunti, e se $A_\gamma = A_j\ \forall \gamma \in \Gamma_j$, si riottengono spazi equivalenti a quelli di [C].

I metodi II e III sono concettualmente molto simili. Si fissa unpoliedro $T \subseteq \mathbf{R}^N$ ($T = \{t \in \mathbf{R}^N;\ t_j > 0,\ \sum_j t_j < 1\}$ nel caso II, $T =]0, 1[^N$ nel caso III), si fa corrispondere uno spazio di Banach A_j ad ogni vertice j del poliedro T e si considerano funzioni olomorfe e limitate $f\colon T + i\mathbf{R}^N \to \Sigma_j(A_j)$ che abbiano (in qualche senso da precisare) valori $f(j + it) \in A_j$ ($t \in \mathbf{R}^N$), in modo che le funzioni $t \to f(j + it)$ stiano (rispetto alla norma di A_j) in qualche prefissato spazio funzionale.

In particolare, nel caso di [Fa] e di [Fe], [BF] si richiede che le funzioni siano continue(nel senso di $\Sigma_j(A_j)$) su $\bar{T} + i\mathbf{R}^N$ e che $t \to f(j + it)$ sia continua e limitata nel senso di A_j. $\forall \theta \in \bar{T}$ si definisce allora $\tilde{A}_\theta = \{f(\theta);\ f \in F\}$, e, ponendo $\|f\|_F = \max_j \sup_t \|f(j + it)\|_{A_j}$ si definisce $\|x\|_\theta = \inf\{\|f\|_F;\ f(\theta) = x\}$.

In [DGV2] ci siamo occupati nel caso III, anche in base alla seguente considerazione di carattere tecnico. Se $T =]0, 1[^N$, allora $T + i\mathbf{R}^N = S^N$ ($S = \{z \in \mathbf{C};\ \mathrm{Re}\,z \in]0, 1[\}$, come nella 1° parte). Ora ogni funzione continua $f\colon \bar{S}^N \to X$ (X spazio di Banach), che sia olomorfa su S^N e che non cresca troppo rapidamente, si può rappresentare in forma integrale come

$$f(a + it) = \sum_{j \in \{0,1\}^N} \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{P}_j(a, t - s)\, f(j + is)\,ds \quad (a \in]0,1[^N)$$

dove il nucleo $P_j(a, \sigma)$ coincide con $\prod_{K=1}^{N} P_{j_K}(a_k, \sigma_k)$, e dove P_o, P_1 sono i nuclei di Poisson per S. Ciò consente una certa maneggevolezza nell'uso di queste funzioni.

3. ALCUNI INCONVENIENTI

Alcune proprietà del metodo complesso d'interpolazione non si conservano passando da due a più spazi; inoltre l'interpolazione tra più spazi non si può ridurre a un'interpolazione iterata. Facciamo, in proposito, alcuni esempi.

Consideriamo gli spazi di Banach A_{jk} $(j,k = 0,1)$, definiti nel modo seguente. $A_{oo} = A_{11} = \{\lambda \in \ell^1(\mathbf{Z});\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda_n = 0\}$ (con la norma di ℓ^1), $A_{10} = \{\lambda: \mathbf{Z} \to \mathbf{C};\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^n|\lambda_n| < +\infty\}$, $A_{01} = \{\lambda: \mathbf{Z} \to \mathbf{C};\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n}|\lambda_n| < +\infty\}$ (con le norme naturali). Allora si può dimostrare che (v. [DGV2], § 5) $[[A_{oo},A_{10}]_{1/2}, [A_{01}, A_{11}]_{1/2}]_{1/2} = \ell^1(\mathbf{Z})$ (con norme equivalenti), mentre $\bigcap_{j,k} A_{jk} \subseteq A_{oo} = A_{11}$ che è un sottospazio chiuso e proprio di $\ell^1(\mathbf{Z})$. Poiché in generale i metodi d'interpolazione danno luogo a spazi intermedi nei quali l'intersezione degli spazi A_j è densa (ciò comunque avviene in tutti i casi sopra citati), è chiaro che questi metodi non daranno spazi equivalenti a quelli ottenuti "per interpolazione iterata". D'altra parte si può addirittura dare un esempio in cui $[[A_{oo},A_{10}]_\theta, [A_{01}, A_{11}]_\theta]_\rho \neq [[A_{oo}, A_{01}]_\rho, [A_{10}, A_{11}]_\rho]_\theta$ (per opportuni A_{jk} e (θ,ρ)). Nel caso in cui gli spazi siano due si può trovare, come si è visto nella I parte, un sottospazio di $F(A_o, A_1)$ (che potremmo chiamare $G(A_o,A_1)$) formato da funzioni olomorfe a valori in $A_o \cap A_1$ e tali che $\forall\, x \in A_o \cap A_1$ e $\forall\, \theta \in]0,1[$ $||x||_\theta = \inf\{||g||_F\ ;\ g \in G,\ g(\theta) = x\}$. Purtroppo il ragionamen

to che consente di ottenere questo risultato non si può ripetere nel caso di più variabili perché è basato sulla possibilità di dividere una funzione olomorfa a valori vettoriali, che si annulli in un punto, per una funzione olomorfa a valori scalari che in quel punto abbia uno zero semplice, e ciò in generale non è possibile per funzioni di più variabili complesse.

Un terzo inconveniente consiste nel fatto che, quando $N \geq 2$, per funzioni $f: \bar{S}^N \to \sum_{j \in \{0,1\}^N} (A_j)$ continue e limitate, olomorfe su S^N, tali che $\forall j \in \{0,1\}^N$ $t \to f(j + it)$ sia continua e limitata da R^N ad A_j, viene a mancare, in generale, la disuguaglianza (analoga a (3.2) della 1° parte)

$$||f(\theta)||_\theta \leq \sum_j \int_{\mathbf{R}^N} P_j(\theta,t) \, ||f(j + it)||_{A_j} \, dt$$

dove $\theta \in]0,1[^N$ e $||x||_\theta = \inf_{g(\theta)=x} ||g||_F$ (dove $|| \ ||_F$ è definita come nel § precedente). Succede anzi che il membro sinistro possa rimanere ≥ 1 mentre quello destro va a 0. Un controesempio si trova in [DGV2], § 5. Si può osservare che la dimostrazione fornita nel caso di una variabile non è più applicabile perché, in generale, assegnate quattro funzioni C^∞ ϕ_{jk}; $R^2 \to R$, limitate, non è detto che esista $\Phi: \bar{S}^2 \to C$, continua, olomorfa su S^2, tale che $\mathrm{Re}\, \Phi(j + is, k + it) = \phi_{jk}(s,t)$: si verifica facilmente che se Φ esiste e tre delle ϕ_{jk} sono nulle, anche la quarta è nulla.

Il venir meno della sopra citata disuguaglianza comporta il fatto che se i valori al bordo delle funzioni olomorfe si suppongono in uno spazio diverso da quello delle funzioni continue e limitate (e precisamente in uno spazio L^1 con peso) si ottengono spazi intermedi diversi. Ciò suggerisce la definizione fornita nel paragrafo seguente.

4. GLI SPAZI $\tilde{A}(a;\, q)$

Sia $\rho\colon \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$, $\rho(t) = (\prod_{k=1}^{N} \cosh(\pi t k))^{-1}$. Il peso ρ ha massa 1 e per $\|t\| \to +\infty$ $\rho(t) \sim \mathbf{P}_j(a,t)$ $\forall j \in \{0,1\}^N, \forall a \in]0,1[^N$. Sia $\tilde{A} = (A_j)_{j \in \{0,1\}^N}$ una famiglia ammissibile di spazi di Banach complessi e $q \in [1,\infty]$. Sullo spazio $\prod_{j \in \{0,1\}^N} L^q_\rho(\mathbf{R}^N, A_j)$ (spazio delle funzioni L^q rispetto alla misura $\rho(t)dt$) definiamo $\forall$ $a \in]0,1[^N$, la norma $|||f|||_{(a;q)} = (\sum_j \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{P}_j(a,t)\, \|f_j(t)\|^q_{A_j} dt)^{1/q}$ (con l'ovvia modifica se $q = \infty$), dove $f = (f_j)_{j \in \{0,1\}^N}$. Ciascuna di queste norme è equivalente alla norma di Banach $f \to (\sum_j \|f_j\|^q_{L^q_\rho})^{1/q}$. Sullo spazio prodotto consideriamo l'applicazione lineare P, i cui valori sono funzioni da S^N a $\Sigma(\tilde{A})$, definite da $P(f)\,(a + it) = \sum_j \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{P}_j(a,t - s)\, f_j(s)ds$. Chiamiamo $\tilde{F}_q(\tilde{A})$ l'immagine mediante P di $\prod_j L^q_\rho(\mathbf{R}^N, A_j)$ e su $\tilde{F}_q(\tilde{A})$ definiamo le norme equivalenti $|||g|||_{(a;q)} = |||P^{-1}(g)|||_{(a;q)}$. Si può provare che la convergenza in $\tilde{F}_q(\tilde{A})$ implica la convergenza uniforme sui compatti di S^N (nella norma di $\Sigma(\tilde{A})$); perciò $F_q(\tilde{A}) = \{f \in \tilde{F}_q(\tilde{A});\ f \text{ olomorfa}\}$ è un sottospazio chiuso di $\tilde{F}_q(\tilde{A})$ e $\forall \theta \in]0,1[^N$ $f \to f(\theta)$ è un operatore lineare e continuo da $\tilde{F}_q(\tilde{A})$ a $\Sigma(\tilde{A})$. Pertanto possiamo definire lo spazio di Banach $\tilde{A}_{(a;q)} = \{f(a);\ f \in F_q(\tilde{A})\}$ con norma $\|x\|_{(a;q)} = \inf_{f \in F_q,\ f(a)=x} |||f|||_{(a;q)}$.

Si dimostra facilmente che $\tilde{A}_{(a;q)}$ è uno spazio intermedio per la famiglia $\tilde{A}$ e precisamente che (data la scelta delle norme) $\Delta(\tilde{A}) \xrightarrow{1} \tilde{A}_{(a;q)} \xrightarrow{1} \Sigma(\tilde{A})$. Dalla disuguaglianza di Hölder segue immediatamente che $\tilde{A}_{(a;r)} \xrightarrow{1} \tilde{A}_{(a;q)}$ per $1 \leq q \leq r \leq \infty$. Inoltre lo spazio $\tilde{A}_{(a;\infty)}$ contiene lo spazio intermedio definito con il metodo di [Fe].

Si dimostra poi il seguente risultato di densità:

Teorema. Lo spazio $G(\tilde{A})$ delle (restrizioni a S^N) di funzioni $f\colon \mathbf{C}^N \to \Delta(\tilde{A})$, olomorfe rispetto alla norma di $\Delta(\tilde{A})$ e tali che $\|f(z)\|_{\Delta(\tilde{A})}$

tende a 0 per $|z| \to +\infty$, $z \in \bar{S}^N$, è denso in $F_q(\tilde{A})$ $\forall q \in [1, \infty[$.

Cenno di dimostrazione. Se g: $\mathbf{C}^N \to \Delta(\tilde{A})$ è olomorfa e per $z \in \bar{S}^N$ $\|g(z)\|_{\Delta(\tilde{A})} \leq C \prod_{k=1}^{N} \cosh(\pi \operatorname{Im} z_k)$, allora $g|_{S^N}$ si può approssimare in $F_q(\tilde{A})$ mediante elementi di $G(\tilde{A})$ (basta moltiplicare g per $\exp(\delta \sum_{k=1}^{N} z_k^2)$ e mandare δ a 0^+); perciò approssimeremo $f \in F_q(\tilde{A})$ con funzioni g del tipo descritto.

$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall a \in]0,1[^N$ poniamo $f_n^{(a)}$: $\mathbf{C}^N \to \Sigma(\tilde{A})$,

$$f_n^{(a)}(z) = \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{\mathbf{R}^N} \exp(n^2 \sum_{k=1}^{N} (z_k - a_k - is_k)^2) f(a + is) ds$$

(l'integrale è inteso nella norma di $\Sigma(\tilde{A})$), e $\forall j \in \{0,1\}^N$ poniamo $f_n^{(j)}$: $\mathbf{C}^N \to A_j$, $f_n^{(j)}(z) = \left(\frac{n}{\sqrt{\pi}}\right)^N \int_{\mathbf{R}^N} \exp(n^2 \sum_{k=1}^{N} (z_k - j_k - is_k)^2) f_j(s) ds$, dove è inteso che $f = P((f_j)_{j \in \{0,1\}^N})$. Questi integrali definiscono funzioni olomorfe e $\forall z \in \mathbf{C}^N$ $f_n^{(a)}(z) \xrightarrow[a \to j]{\Sigma(\tilde{A})} f_n^{(j)}(z)$. Inoltre si prova, integrando $\xi \mapsto e^{n^2(z-\xi)^2} f(\xi)$ su opportuni circuiti che $f_n^{(a)}(z)$ non dipende da a. Perciò $f_n(z) = f^{(a)}(z) = f_n^{(j)}(z) \in A_j$ e quindi f_n è una funzione olomorfa da $\mathbf{C}^N$ a $\Delta(\tilde{A})$. Per di più f_n ha il tipo di crescita desiderato su $\bar{S}^N$. Infine si prova che $f_n \xrightarrow{F_q} f$ (si tenga presente che f_n è la convoluzione di f con un nucleo regolarizzante).

Un'ovvia conseguenza del teorema di densità è il fatto che $\Delta(\tilde{A})$ è denso in $\tilde{A}_{(a;q)}$ $\forall a \in]0,1[^N$, $q \in [1, +\infty[$. La densità di $\Delta(\tilde{A})$ in $\tilde{A}_{(a;q)}$ consente in alcuni casi di ottenere risultati d'inclusione tra spazi eseguendo stime di norme su elementi di $\Delta(\tilde{A})$. In particolare si ha che:

- se A_j^o è la chiusura di $\Delta(\tilde{A})$ in A_j, allora $F_q(\tilde{A}^o) = F_q(\tilde{A})$ e $\tilde{A}_{(a;q)} = \tilde{A}^o_{(a;q)}$ $(a \in]0,1[^N$, $1 \leq q < \infty)$
- se $A_{(0,k)} \hookrightarrow A_{(1,k)}$ $\forall k \in \{0,1\}^{N-1}$, allora $\forall b \in]0,1[^{N-1}$ e per

$0 < a' < a'' < 1$, $1 \leq q < \infty$, $\tilde{A}_{(a',b;q)} \hookrightarrow \tilde{A}_{(a'',b;q)}$

- posto $\tilde{B} = (A_{k,0})_{k \in \{0,1\}^{N-1}}$, $\tilde{C} = (A_{k,1})_{k \in \{0,1\}^{N-1}}$, si ha che $\forall a \in]0,1[^{N-1}$, $b \in]0,1[$, $q \in [1,\infty[$ $\tilde{A}_{(a,b;q)} \overset{1}{\hookrightarrow} [\tilde{B}_{(a;q)}, \tilde{C}_{(a;q)}]_b$, dove $[X,Y]_b$ denota lo spazio d'interpolazione di Calderón (come si è osservato sopra, in generale non vale l'uguaglianza)
- se $A_{k,o} = A_{k,1} = B_k$ $\forall k \in \{0,1\}^{N-1}$, allora $\forall a \in]0,1[^{N-1}$, $b \in]0,1[$, $q \in [1,\infty[$ $\tilde{A}_{(a,b;q)} = \tilde{B}_{(a;q)}$

5. DUALITA'

Per studiare le dualità supporremo sempre che $\Delta(\tilde{A})$ sia denso in A_j $\forall j \in \{0,1\}^N$. Si presenta subito un ulteriore inconveniente: può succedere, come per il metodo Σ, che il sottospazio di $\Delta(\tilde{A})^*$ identificabile a $(\tilde{A}_{(a;q)})^*$ (e che chiameremo $(\tilde{A}_{(a;q)})'$) non sia intermedio per la famiglia $\tilde{A}' = (A_j')_{j \in \{0,1\}^N}$, perché può non contenere $\Delta(\tilde{A}')$ (un controesempio si trova in [DGV2], § 6).

Abbiamo comunque cercato di caratterizzare $(\tilde{A}_{(a;q)})'$ sotto opportune ipotesi sugli spazi A_j. La caratterizzazione da noi data, però, descrive $(\tilde{A}_{(a;q)})'$ in termini dei valori assunti in $a \in]0,1[^N$ dalle funzioni di uno spazio $H(a;q')$, che dipende da a; ciò impedisce di utilizzare questo risultato per ottenere l'inclusione non banale del teorema di reiterazione, in modo analogo al caso dei due spazi (un inconveniente dello stesso tipo, in una situazione simile, è segnalato in [CCRSW2] p. 215).

Per comodità supponiamo di essere in ipotesi tali che per $1 \leq q < \infty$ il duale di $L^q_\rho(\mathbf{R}^N, A_j)$ sia identificabile (mediante un'ovvia dualità "pesata") con $L^{q'}_\rho(\mathbf{R}^N, A_j')$ $(\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1)$.

Sia $\phi \in (\tilde{A}_{(a;q)})^*$. Il funzionale ϕ definisce un funzionale

$\Phi \in (F_q(\tilde{A}))^*$ mediante l'uguaglianza $\Phi(f) = \phi(f(a))$, e da Φ si ottiene, mediante il teorema di Hahn-Banach, un funzionale lineare continuo su $\tilde{F}_q(\tilde{A})$, che chiamiamo ancora Φ. Dunque $\Phi \circ P \in (\prod_j L^q_\rho(\mathbf{R}^N, A_j))^*$ e questo spazio duale s'identifica naturalmente con $\prod_j L^{q'}_\rho(\mathbf{R}^N, A'_j)$: pertanto risulta individuata una famiglia $(\psi_j)_{j\in\{0,1\}^N}$ in questo spazio prodotto. Ora se $f = P((f_j)_{j\in\{0,1\}^N}) \in F_q(\tilde{A})$, e $f(a) = 0$, si avrà, a causa della dualità scelta, $\sum_j \int_{\mathbf{R}^N} P_j(a,s) < \psi_j(s), f_j(s)> ds = 0$ (qui $\psi_j(s)$ s'identifica alla sua estensione continua ad A_j). Pertanto, se vogliamo caratterizzare $(\tilde{A}_{(a;q)})'$ mediante i valori in a di un certo spazio funzionale, sarà opportuno considerare lo spazio $H_{(a;q)}(\tilde{A})$ delle funzioni del tipo $\psi = P((\psi_j)_{j\in\{0,1\}^N})$ dove $\psi_j \in L^{q'}_\rho(\mathbf{R}^N, A'_j)$ e ψ è "ortogonale" alle funzioni olomorfe $f \in F_q(\tilde{A})$ che si annullino in a. Si prova in effetti che in questo modo si caratterizza esattamente $(\tilde{A}_{(a;q)})'$.

Osserviamo che tra le $f \in F_q(\tilde{A})$ che si annullano in a ci sono, in particolare, le funzioni olomorfe $f: S^N \to \Delta(\tilde{A})$ tali che $f = P((f_j)_{j\in\{0,1\}^N})$ con $f_j \in L^q_\rho(\mathbf{R}^N, \Delta(\tilde{A}))$. Pertanto ogni $h \in H_{(a;q')}(\tilde{A}')$ è "ortogonale" a queste funzioni. Se, mediante una trasformazione $\mu: S^N \to D^N$ $(D = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\})$, tale che $\mu(z) = (\mu_1(z_1),\dots\mu_n(z_N))$ e $\mu_k: S \to D$ è una trasformazione conforme tale che $\mu_k(a_k) = 0$, ci trasportiamo su D^N, è noto che i coefficienti di Fourier $(c_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{Z}^N}$ delle funzioni olomorfe che si annullano in 0 sono nulli quando $\min_k \alpha_k < 0$ e quando $\alpha = 0$. Pertanto i coefficienti di Fourier (b_α) delle funzioni ottenute dalle $h \in H_{(a;q)}(\tilde{A}')$ per cambiamento di variabili sono nulli quando $\max_k \alpha_k \leq 0$ purché sia $\alpha \neq 0$. Se consideriamo, al posto di H, lo spazio $H'_{(a;q')}(\tilde{A}')$ di queste funzioni (che è un sottospazio chiuso di $\tilde{F}_{q'}(\tilde{A}')$) e poniamo $\tilde{A}'^{(a;q')} = \{h(a);\ h \in H'_{(a;q')}(\tilde{A}')\}$ (con la norma ovvia) otteniamo che $\tilde{A}'^{(a;q')}$ è uno spazio d'interpolazione, di cui $(\tilde{A}_{(a;q')})'$ è un sottospazio chiuso, con la stessa norma. Il fatto che, assegnato $x \in \Delta(\tilde{A})$, $\|x\|_{(a;q)}$ non si riesce a raggiungere come estremo inferiore di norme in $\tilde{F}_q(\tilde{A})$ di funzioni olomorfe $f: S^N \to \Delta(\tilde{A})$ tali che $f(a) = x$(v.

§ 3 sopra) sembra essere un considerevole ostacolo a provare che $A'^{(a;q')} =$ $= (A_{(a;q)})'$ (nel controesempio citato all'inizio di questo §, in cui $(A_{(a;q)})'$ non è intermedio per la famiglia $(A'_j)_{j \in \{0,1\}^N}$, gli A_j sono spazi ℓ^1 con peso, e quindi non soddisfano le ipotesi sul duale di $L^q_\rho(\mathbf{R}^N, A_j)$ che abbiamo fatto).

BIBLIOGRAFIA

[DGV1] G. DORE, D. GUIDETTI, A. VENNI: Some Properties of the Sum and the Intersection of Normed Spaces. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena 31 (1982) n. 2 (1984).

[DGV2] G. DORE, D. GUIDETTI, A. VENNI: Complex Interpolation for 2^N Banach Spaces.

[CCRSW1] R.R. COIFMAN, M. CWIKEL, R. ROCHBERG, Y. SAGHER, G. WEISS: The Complex Method for Interpolation of Operators acting on Families of Banach Spaces; Lecture Notes in Math. 779 Springer Verlag, Berlin 1980, 123-153.

[CCRSW2] R.R. COIFMAN, M. CWIKEL, R. ROCHBERG, Y. SAGHER, G. WEISS: A Theory of Complex Interpolation for Families of Banach Spaces, Adv. in Math. 43 (1982), 203-229.

[CF] M. CWIKEL, S. FISHER: Complex Interpolation Spaces on Multiply Connected Domains; Adv. in Math. 48 (1983), 286-294.

[KN1] S.G. KREIN, L.I. NIKOLOVA: Holomorphic Functions in a Family of Banach Spaces, and Interpolation; Soviet Math. Dokl. 21 (1980), 131-134.

[KN2] S.G. KREIN, L.I. NIKOLOVA: Complex Interpolation for Families Banach Spaces; Ukrainian Math. J. 34 (1982) 26-36.

[FA] A. FAVINI: Su una estensione del metodo d'interpolazione complesso; Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 47 (1972) 243-298.

[L] J.-L. LIONS: Une construction d'espaces d'interpolation; C.R.A.S. Paris Sér. A-B 251 (1960), 1853-1855.

[Fe] D.L. FERNANDEZ: An Extension of the Complex Method of Interpolation; B.U.M.I. B(5) 18 (1981), 721-732.

[BF] J.I. BERTOLO, D.L. FERNANDEZ: On the Connection between the Real and the Complex Interpolation Method for Several Banach Spaces; Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 66 (1982), 193-209.

[C] A.P. CALDERON: Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method; Studia Math. 24 (1964), 113-190.